به نام زندگی

توابع احتمال یک متغیر تصادفی

- تابع Pmf (برای متغیرهای تصادفی گسسته)

- تابع PDF (تابع توزیع احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته)

بررسی کنید آیا تابع $P(x)=\frac{x+2}{25}$, $x=1,2,3,4,5$

می‌تواند تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته باشد؟

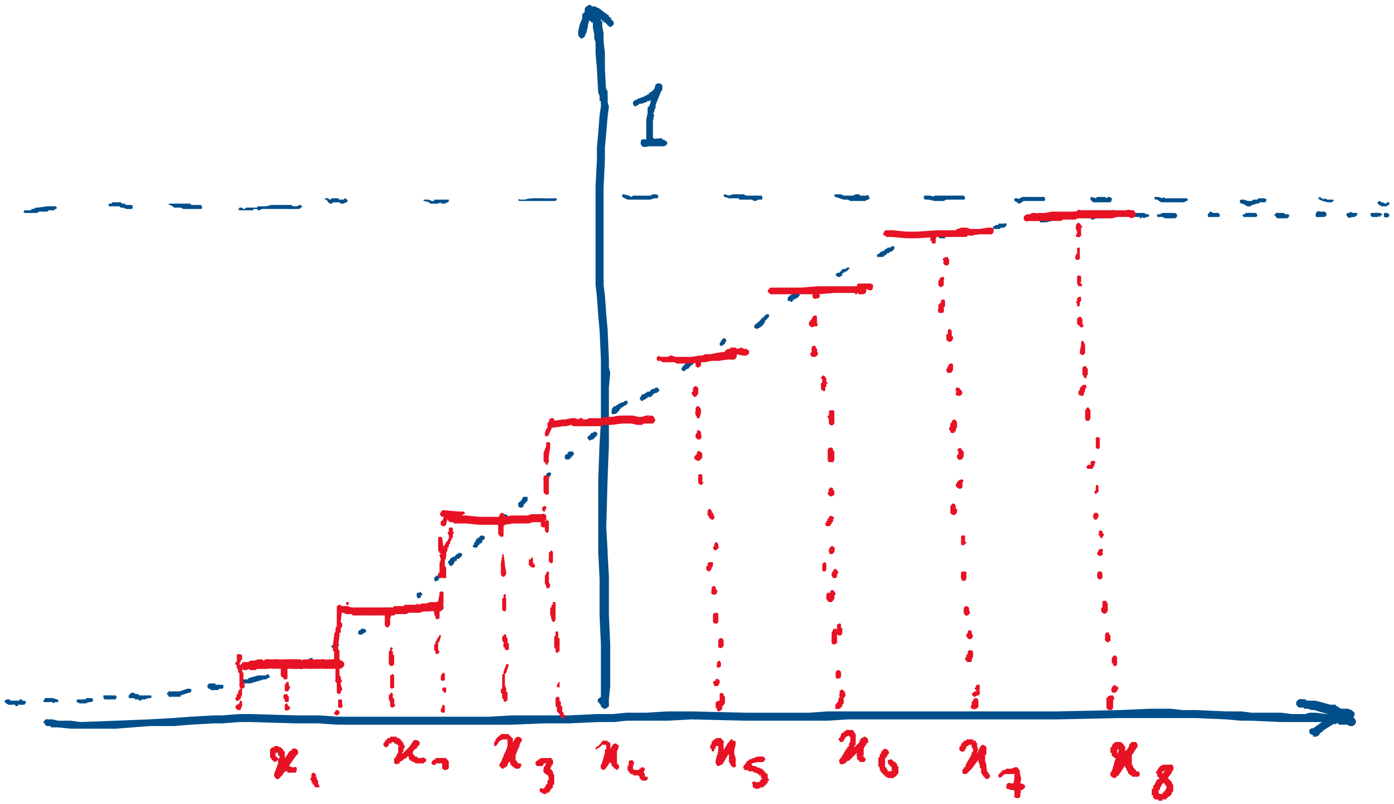
$x=1,2,3,4,5$ $\qquad 0 \le P(x) \le 1$

$$\sum_x P(x)=1 \quad , \quad \sum_x P(x) = \sum_{x=1}^{5}\frac{x+2}{25}$$

$$= \frac{1}{25}\left(5\times 2+\sum_{x=1}^{5} x\right) = 1$$

به دست آوردن تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی بصورت تجربی (تعدادی)

در بسیاری از کاربردها، اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات را در مورد یک متغیر تصادفی در اختیار داریم و می‌خواهیم مشخصات آماری این متغیر تصادفی را به دست بیاوریم.
می‌توانیم با داشتن اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات مناسب، تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی را به صورت تجربی (عددی) به دست بیاوریم.


1
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8

در اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات، اگر فرض کنیم n اندازه‌گیری یا مشاهده یا آزمایش انجام داده‌ایم و مقدار x_i به تعداد n_{x_i} بار تکرار شده است، آنگاه می‌توانیم یک رابطه‌ی نزدیک تقریب از تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی به دست آوریم:

$$F_X(x) = P_r\{X \leqslant x\} \simeq \frac{n_x}{n}$$

که در آن n_x تعداد دفعاتی است که متغیر تصادفی X مقداری کوچکتر یا مساوی x دارد
$\{X \leqslant x\}$

هرچه تعداد نقاط اندازه‌گیری (یا مشاهده) بیشتر باشد و تعداد تکرار آزمایش‌ها افزایش پیدا کند، نمودار تجربی به نمودار واقعی نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال: فرض کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی تعداد شیرها در سه بار پرتاب یک سکه‌ی سالم باشد. تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی را به دست بیاورید.

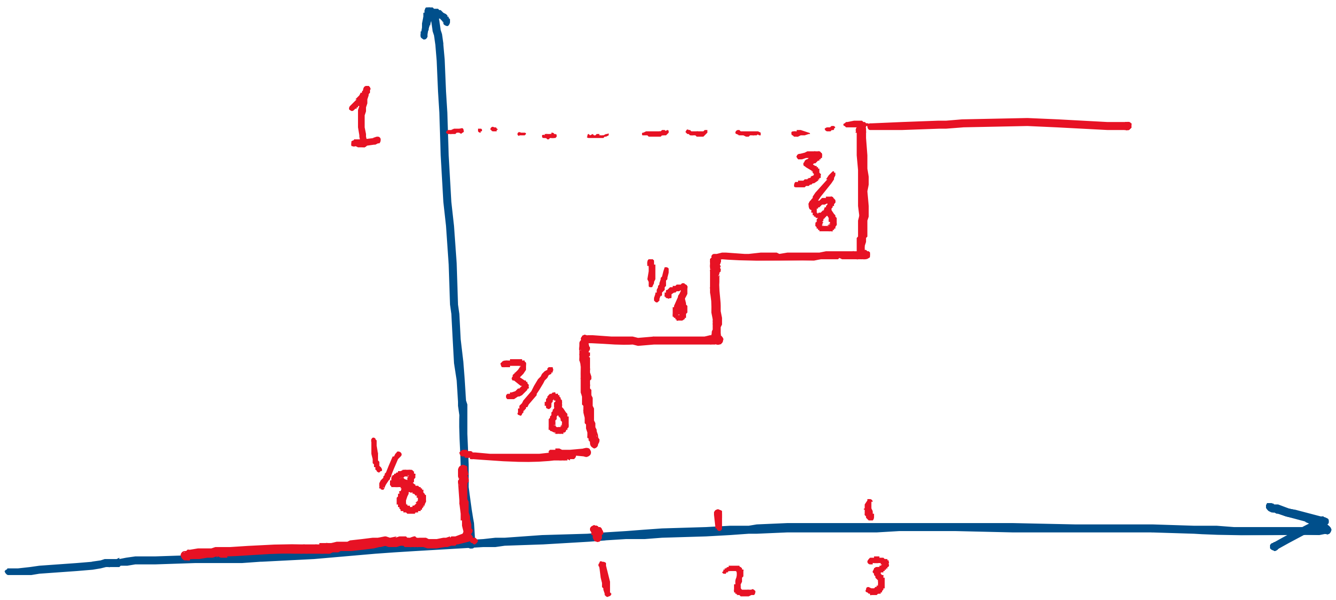
X: متغیر تصادفی دوجمله‌ای

$n = 3 \,, \quad P = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P_X(x) = \Pr\{X = x\} = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} & x \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$P_X(x) = \Pr\{X = x\} = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} & x \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i=0}^{3} P_X(x_i)\, u(x - x_i)$$



مثال: برای متغیر تصادفی مثال قبل، آزمایش تصادفی را ۱۰ بار تکرار کرده ایم و اندازه گیری های زیر را به دست آورده ایم. تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی را به صورت تجربی به دست بیاورید.

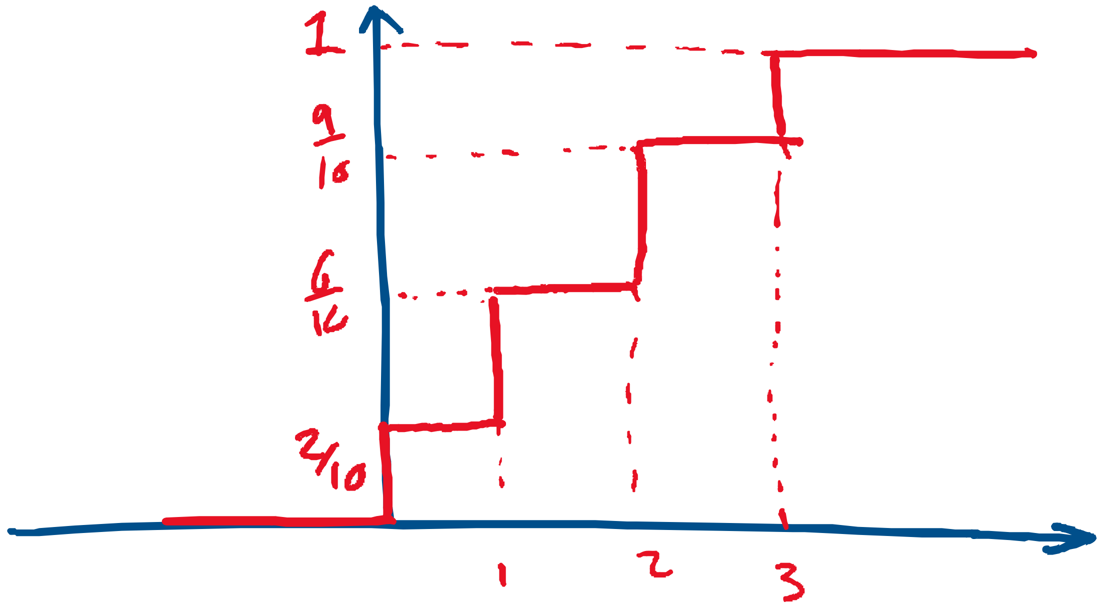
x_i	0	1	2	3
n_{x_i}	2	4	3	1

$$P_r\{X \le 0\} \cong \frac{n_0}{n} = \frac{2}{10}$$

$$P_r\{X \le 1\} \cong \frac{n_1}{n} = \frac{2+4}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P_r\{X \le 2\} \cong \frac{n_2}{n} = \frac{2+4+3}{10} = \frac{9}{10}$$

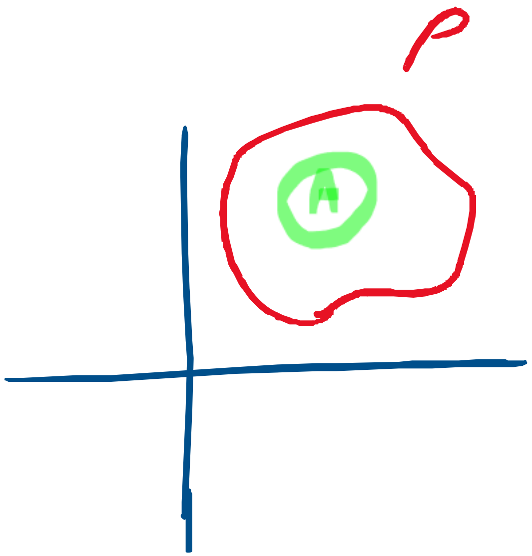
$$P_r\{X \le 3\} \cong \frac{n_3}{n} = \frac{10}{10} = 1$$


1
9/10
6/10
2/10
1
2
3

تابع چگالی احتمال Probability distribution function (pdf)

در تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی به دنبال تابعی هستیم که با انتگرال گیری از آن، روی ناحیه پیش آمد مورد نظر، بتوانیم احتمال آن پیش آمد را به دست بیاوریم. بنابراین می دانیم که چنین تابعی، مفهومی مشابه چگالی جرمی دارد.

$$m = \int \rho \, dx$$



$$m_A = \int_A \rho \, dx \, dy$$

برای تعریف تابع چگالی احتمال از تابع توزیع احتمال کمک می گیریم.

می دانیم که تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X ، یعنی $F_X(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

و دیدیم که با کمک $F_X(x)$ می توان احتمال هر پیشامدی را در ارتباط با X بر روی محور اعداد حقیقی به دست آورد.

$$P_r\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

بنابراین تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

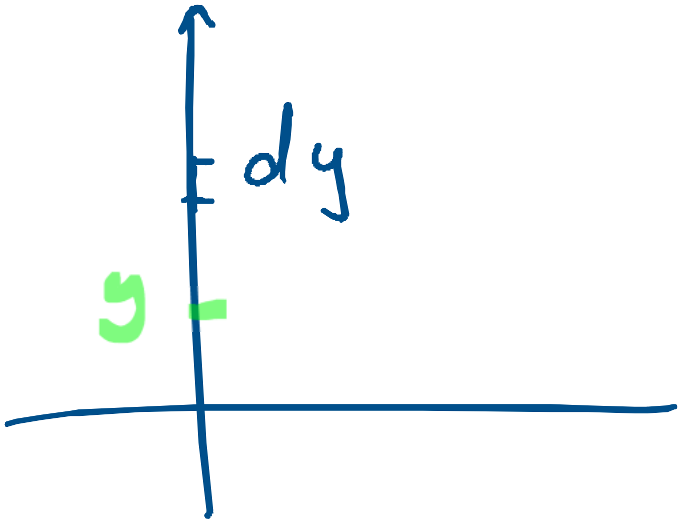
$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$\Longrightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha + C$$

$F_X(-\infty) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \overbrace{F_X(-\infty)}^{0} = \overbrace{\int_{-\infty}^{-\infty} f_X(\alpha)\,d\alpha}^{0} + C$$



$$\int_0^y f(y)\,dy$$

$$\Longrightarrow \quad C = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_X(x) = \dfrac{d}{dx} F_X(x) \\ , \\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha \end{cases} \qquad (1)$$

همان طور که می‌بینیم بین تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X و تابع چگالی احتمال آن یک

رابطه یک به یک وجود دارد (در حالت یک بعدی)

بنابراین هر خصوصیتی که در مورد $F_X(x)$ (تابع توزیع احتمال) بیان کردیم

به طور مشابه برای $f_X(x)$ (تابع چگالی احتمال) نیز برقرار است.

$$2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

تابع چگالی احتمال یک متغیر

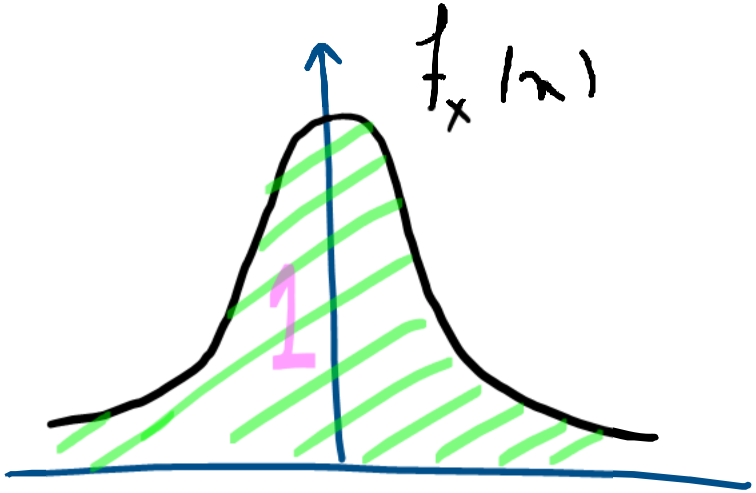
تصادفی X، تابعی نرمالیزه از x است.

می‌دانیم که

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

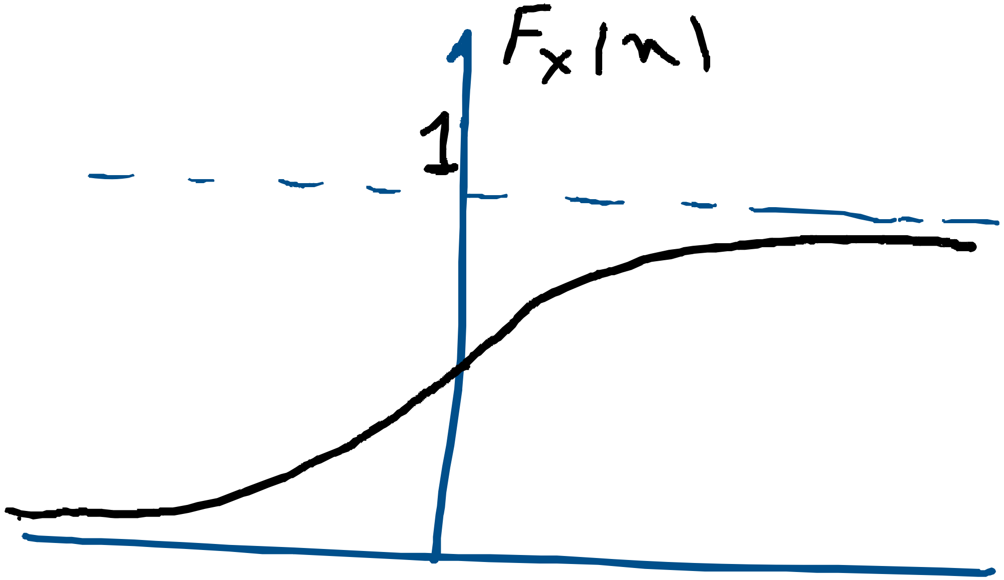
$$\xRightarrow{x = \infty} \underbrace{F_X(\infty)}_{1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$



$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx =$ سطح زیر منحنی $f_X(x)$

$= 1$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha$$

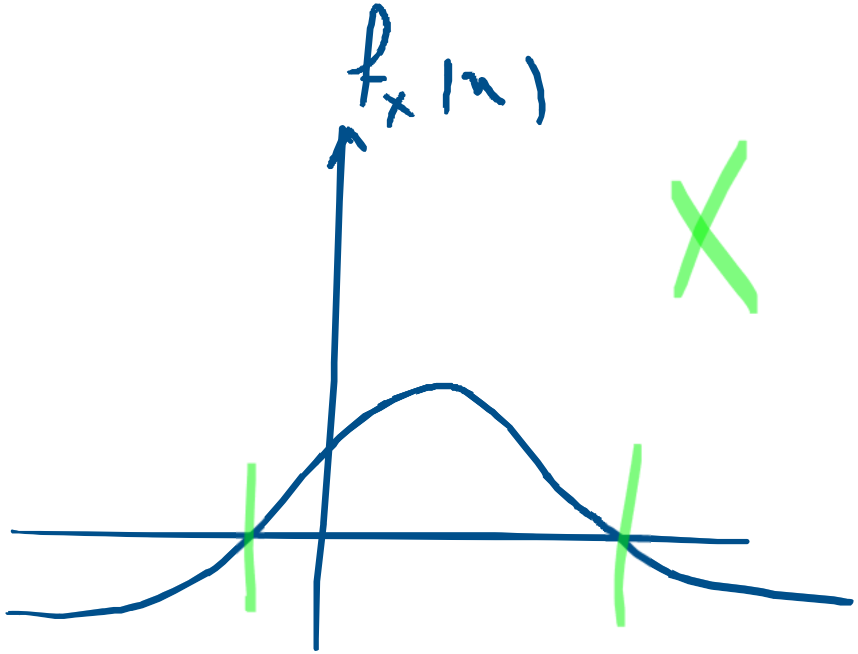
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

3) $\forall x \; ; \; f_X(x) \geq 0$

زیرا می دانیم که $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ و از طرف دیگر می دانیم که تابع

توزیع احتمال $F_X(x)$ یک تابع غیرنزولی از x است. بنابراین مشتق آن

حتماً غیرمنفی است



fx(x)
X

4) $$P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

$$P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$F_X(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,dx, \quad F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

$$5) \quad P_r\{X = x_0\} = \int_{x_0^-}^{x_0} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } f_X(x) \text{ در نقطه‌ی } x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } f_X(x) \text{ در نقطه } x_0 \text{ یک ضربه به وزن } P_0 \text{ داشته باشد.} \end{cases}$$

$$P_r\{X = x_0\} = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = \int_{x_0^-}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } f_X(x) \text{ در نقطه } x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } f_X(x) \text{ در نقطه } x_0 \text{ دارای یک ضربه به وزن } P_0 \text{ باشد} \end{cases}$$

6) $P_r \{ X \in A \} = \int_A f_X(x)\, dx$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \qquad (1$$

$$\frac{\binom{k}{m}\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}} \qquad (2$$